1. Definition von Dezimalzahlen

Definition: Dezimalzahlen sind Zahlen mit einem Komma, wobei die Ziffern nach dem Komma die Zehntel, Hundertstel, Tausendstel, usw. entsprechend dem 10-er Zahlensystem anzeigen. Die Ziffern nach dem Komma heißen „**Dezimalen**“ oder „**Dezimalstellen**“.

Für Dezimalzahlen ist die **Stelle nach dem Komma** der jeweiligen Ziffer entscheidend (!), wie die folgende Tabelle zeigt.

Stelle nach dem Komma	Name	Beispiel	Bruch	Zehnerpotenz
1	Zehntel	0,1	$\frac{1}{10}$	10^{-1}
2	Hundertstel	0,01	$\frac{1}{100}$	10^{-2}
3	Tausendstel	0,001	$\frac{1}{1000}$	10^{-3}
4	Zehn tausendstel	0,0001	$\frac{1}{10000}$	10^{-4}
5	Hundert tausendstel	0,00001	$\frac{1}{100000}$	10^{-5}
6	Millionstel	0,000001	$\frac{1}{1000000}$	10^{-6}

Wie bei Brüchen geben die Ziffern der Dezimalzahlen nach dem Komma **Bruchteile eines Ganzen** an, wie folgende Beispiele zeigen.

1. Beispiel: Der Weltrekord im 100 m Lauf der Männer ist 9,58 Sekunden. Das sind 9 ganze Sekunden plus 5 Zehntel plus 8 Hundertstel, also:
   $9{,}58=9+5\frac{1}{10}+8\frac{1}{100}=9+\frac{5}{10}+\frac{8}{100}$.

2. Beispiel: Ein Formel 1 Rennwagen benötigt für eine Runde auf einer Rennstrecke 67,254 Sekunden. Das sind 67 ganze Sekunden plus 2 Zehntel plus 5 Hundertstel plus 4 Tausendstel, also:
   $67{,}254=67+2\frac{1}{10}+5\frac{1}{100}+4\frac{1}{1000}=67+\frac{2}{10}+\frac{5}{100}+\frac{4}{1000}$.

3. Beispiel: Die Dezimalzahlen im 1. und 2 Beispiel können auch wie folgt in einen gemischten Bruch geschrieben werden:
   $9{,}58=9\frac{58}{100}$, $67{,}254=67\frac{254}{1000}$.

FAZIT: Dezimalzahlen und Brüche sind identisch! (z.B. 0,1 = $\frac{1}{10}$)

Es sind nur verschiedene Schreibweisen von Mengenangaben, die aus Vielfachen und Bruchteilen eines Ganzen bestehen.

<u>2. Runden von Dezimalzahlen</u>

<u>**Definition:**</u> Das Runden von Dezimalzahlen ist die Verkürzung bzw. Vereinfachung einer gegebenen Dezimalzahl auf eine Zahl mit weniger Ziffern.

Der Unterschied zwischen ursprünglicher und gerundeter Zahl ist der sog. **Rundungsfehler**. Man nimmt diesen Rundungsfehler in Kauf, wenn man nur an einem Näherungswert interessiert ist, weil der genaue Wert im Alltag unerheblich ist, wie folg. Beispiele zeigen.

1. Beispiel: Ein Schüler benötigt exakt 1 Stunde, 9 Minuten und 32 Sekunden, um nach einer Schulveranstaltung nach Hause zu kommen. Seinem Freund würde er aber sagen, dass er 1 Stunde und 10 Minuten gebraucht hat oder sogar nur gut eine ganze Stunde für den Heimweg.

2. Beispiel: Die Wegstrecke eines Schülers von seiner Haustür bis zum Schulgebäude ist exakt 9 km, 115 Meter und 40 Zentimeter. Er würde aber immer sagen, dass sein Schulweg etwa 9 km lang ist.

<u>**Regeln für das Runden:**</u>

1) Lege die Ziffer fest, auf die gerundet werden soll. Diese sog. **Rundungsstelle** ist logischerweise links von der letzten Dezimale der gegebenen Dezimalzahl.
2) Die **Grenze** bzw. die Mitte für das Runden ist die Fünf.
3) <u>Alle Ziffern kleiner als diese Grenze werden abgerundet.</u> Diese Ziffern bleiben gleich.
4) <u>Alle Ziffern gleich oder größer als diese Grenze werden aufgerundet.</u> Dann wird die Rundungsstelle um Eins erhöht.
5) Überprüfe das Ergebnis, ob es sinnvoll ist und ob der gemachte Rundungsfehler akzeptabel ist.

Folg. Beispiele veranschaulichen diese Rundungsregeln:

1. <u>Beispiel:</u> Der Weltrekord im 100 m Lauf der Männer ist 9,58 Sekunden. Diese Dezimalzahl soll zuerst auf a) Zehntel und dann auf b) ganze Sekunden gerundet werden.
   Lösung für a): Die Rundungsstelle sind die Zehntel, also die 1. Stelle nach dem Komma, also die „5“. Die „8“ an der 2. Stelle ist größer als die Grenze von Fünf, wird demnach aufgerundet. Also wird die „5“ um Eins erhöht, also 5 +1 = 6. Das Ergebnis sind dann 9,6 Sekunden.

   Lösung für b): Für 9,6 Sekunden ist die Rundungsstelle die Einser, also die 1. Stelle vor (!) dem Komma, also die „9“. Die „6“ an der 1. Stelle ist größer als die Grenze von Fünf, wird demnach aufgerundet. Also wird die „9“ um Eins erhöht, also 9 +1 = 10. Das Ergebnis sind dann 10 Sekunden.

2. <u>Beispiel:</u> Ein Formel 1 Rennwagen benötigt für eine Runde auf einer Rennstrecke 67,254 Sekunden. Diese Dezimalzahl soll zuerst auf a) Hundertstel, b) Zehntel, c) ganze Sekunden und dann auf d) Zehner Sekunden gerundet werden.

   Lösung für a): Die „4“ wird abgerundet, also 67,254 ≈ 67,25 Sekunden.
   Lösung für b): Die „5“ wird aufgerundet, also 67,25 ≈ 67,3 Sekunden.
   Lösung für c): Die „3“ wird abgerundet, also 67,3 ≈ 67 Sekunden.
   Lösung für d): Die „7“ wird aufgerundet, also 67 ≈ 70 Sekunden.

3. Umwandeln von Brüchen in Dezimalzahlen

Regeln: Das Umwandeln von Brüchen in Dezimalzahlen wird entweder mit den **Erweitern** oder **Kürzen** des Bruches gemacht, so dass man als Zwischenergebnis einen Nenner von 10, 100, 1000, usw. bekommt, woraus sich dann die Dezimalzahl ergibt, so wie es das nachfolgende 1. Beispiel zeigt.

Oder man rechnet eine **Division** von Zähler durch den Nenner aus, dessen Ergebnis sofort die gesuchte Dezimalzahl ergibt. Beachte das Komma dann im Ergebnis zu setzen, wenn die Einser (1. Stelle vor dem Komma) durch einen größeren Nenner dividiert werden.

1. Beispiel: $\frac{3}{10}=0{,}3\,;\,\frac{7}{100}=0{,}07\,;\,\frac{9}{1000}=0{,}009$.

.

2. Beispiel für das Erweitern von Brüchen:

   $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}=0{,}5\,;\,\frac{3}{4}=\frac{75}{100}=0{,}75\,;\,\frac{1}{8}=\frac{125}{1000}=0{,}125$.

   Der 1. Bruch wurde mit 5, der 2. mit 25 und der 3. mit 125 erweitert.

3. Beispiel für das Kürzen von Brüchen:

   $\frac{4}{20}=\frac{2}{10}=0{,}2\,;\,\frac{51}{30}=\frac{17}{10}=1{,}7\,;\,\frac{16}{400}=\frac{4}{100}=0{,}04$.

   Der 1. Bruch wurde mit 2, der 2. mit 3 und der 3. mit 4 gekürzt.

4. Division von Zähler durch den Nenner, z.B.

   $\frac{23}{20}=23:20$;

   23,00 : 20 = 1,15
   $-\underline{20}$
   30
   $-\underline{20}$ (Zehntel, d.h. die 1. Stelle nach dem Komma)
   100
   $-\underline{100}$ (Hundertstel, d.h. die 2. Stelle nach dem Komma)
   0

   Probe: $\frac{23}{20}=1\frac{3}{20}=1\frac{15}{100}=1{,}15$.

4. Periodische Dezimalzahlen

Definition: Periodische Dezimalzahlen haben ein sich wiederholendes, fortlaufendes Muster in den Ziffern nach dem Komma. Es entsteht durch eine nicht abbrechende Division von Zähler und Nenner mit sich wiederholenden Resten. Die sich wiederholenden Ziffern sind die sog. „**Periode**“, gekennzeichnet durch einen Strich oberhalb der Ziffern.

Eine der bekanntesten periodischen Dezimalzahlen gibt es für den Bruch $\frac{1}{3}$, wie die folgende Division von Zähler und Nenner zeigt:

```
1 : 3 = 0,33...
10
-9
 10
 -9
  1
  ...   usw.
```

Diese periodische Dezimalzahl wird abgekürzt mit $\frac{1}{3}=0,\overline{3}$.
Mit Worten liest man: „Null Komma Periode drei“.

Andere Beispiele für periodische Dezimalzahlen sind:

1. Beispiel: $\frac{2}{3}=0,\overline{6}$, $\frac{1}{6}=0,1\overline{6}$, $\frac{1}{7}=0,\overline{142857}$.

2. Beispiel: $\frac{1}{9}=0,\overline{1}$, $\frac{1}{99}=0,\overline{01}$, $\frac{1}{999}=0,\overline{001}$.

5. Addition und Subtraktion von Dezimalzahlen

Regel: Dezimalzahlen werden wie ganze Zahlen addiert und subtrahiert, nur müssen die Kommas übereinander geschrieben werden, so dass immer die entsprechenden Ziffern links vom Komma (Einer, Zehner, Hunderter,...) und rechts vom Komma (Zehntel, Hundertstel, Tausendstel,...) miteinander verrechnet werden können.

Beim übereinander Schreiben von Dezimalzahlen ist es für das Addieren und Subtrahieren hilfreich, fehlende Ziffern durch Nullen zu ergänzen (Siehe 3. und 4. Beispiel).

Nachfolgend einige Beispiele entsprechend dieser Regel:

1. Beispiel: 1,2 + 3,4 =, also

$$\begin{array}{r} 1{,}2 \\ \underline{+\ 3{,}4} \\ 4{,}6 \end{array}$$

2. Beispiel: 5,96 – 2,34 =, also

$$\begin{array}{r} 5{,}96 \\ \underline{-\ 2{,}34} \\ 3{,}62 \end{array}$$

3. Beispiel: 12,43 + 7,378 =, also

$$\begin{array}{r} 12{,}43\mathbf{0} \\ \underline{+\ 7{,}378} \\ 19{,}808 \end{array}$$ (Hier eine Null ergänzt)

4. Beispiel: 25,9 – 12,456 =, also

$$\begin{array}{r} 25{,}9\mathbf{00} \\ \underline{-\ 12{,}456} \\ 13{,}444 \end{array}$$ (Hier zwei Nullen ergänzt)

6. Multiplikation von Dezimalzahlen mit einer natürlichen Zahl

Regeln: Die Multiplikation einer Dezimalzahl mit einer natürlichen Zahl wird zuerst ohne das Komma berechnet. D.h. man lässt im 1. Schritt das Komma weg und führt eine gewöhnliche Multiplikation aus. Im Ergebnis setzt man danach im 2. Schritt das Komma wieder an die gleiche Dezimalstelle wie zuvor.

Nachfolgend einige Beispiele entsprechend dieser Regeln:

1. Beispiel: 0,3 x 2, also

   3 x 2 = 6 — Weil 0,3 eine Dezimalstelle hat, wird aus der 6 eine 0,6, also ist das Ergebnis lautet 0,6.

   = 0,6

2. Beispiel: 5 x 0,1 = 0,5 (Eine Dezimalstelle)
   5 x 0,01 = 0,05 (Zwei Dezimalstellen)
   5 x 0,001 = 0,005 (Drei Dezimalstellen)
   usw.

3. Beispiel: 11 x 0,11 = 1,21
   12 x 0,12 = 1,44
   13 x 0,13 = 1,69

7. Multiplikation von zwei Dezimalzahlen

Regeln: Die Multiplikation von zwei Dezimalzahlen wird zuerst ohne ihre Kommas berechnet. D.h. man lässt im 1. Schritt die Kommas weg und führt eine gewöhnliche Multiplikation aus. Im Ergebnis setzt man danach im 2. Schritt das Komma an die Dezimalstelle, die sich aus der Summe der Dezimalmastellen beider Zahlen ergibt.

Nachfolgend einige Beispiele entsprechend dieser Regeln:

1. Beispiel: 0,3 x 0,4, also

   3 x 4 = 12 — Weil 0,3 eine Dezimalstelle und 0,4 eine Dezimalstelle haben, ergibt sich in der Summe 1 + 1 = 2 Dezimalstellen, so dass aus der 12 eine 0,12 wird, also ist das Ergebnis 0,12.

   = 0,12

2. Beispiel: 0,2 x 0,2 = 0,04 (1 + 1 = 2 Dezimalstellen)
   0,5 x 1,23 = 0,615 (1 + 2 = 3 Dezimalstellen)
   0,05 x 0,06 = 0,0030 (2 + 2 = 4 Dezimalstellen)
   1,55 x 0,008 = 0,01240 (2 + 3 = 5 Dezimalstellen)

8. Division von Dezimalzahlen mit einer natürlichen Zahl

Regel: Die Division einer Dezimalzahl mit einer natürlichen Zahl wird genauso wie die Division zweier natürlicher Zahlen gemacht. Dann wird das Komma im Ergebnis an der Dezimalstelle gesetzt, wo bei den einzelnen Divisionsschritten das Komma vorkam.

Hier einige Beispiele für schriftliches Dividieren entsprechend dieser Regel:

1. Beispiel: (Die erste Zahl 3,4 ist der sog. **Dividend**, die zweite Zahl 2 der sog. **Divisor**)

```
 3,4 : 2 = 1,7
-2
 1 4
-1 4
   0
```

2. Beispiel:

```
 0,4 : 8 = 0,05
-0
 0 4
  - 0
    40
   -40
     0
```

3. Beispiel:

```
 14,4 : 12 = 1,2
-12
   24
  -24
    0
```

4. Beispiel:

```
 186,6 : 30 = 6,22
-180
    66
   -60
     60
    -60
      0
```

5. Beispiel:

```
 1016,6 : 13 = 78,2
 - 91
   106
  -104
     26
    -26
      0
```

9. Division von zwei Dezimalzahlen

Regel: Die Division von zwei Dezimalzahlen wird auf eine Division mit einer natürlichen Zahl zurückgeführt, indem man das Komma in beiden Zahlen in gleicher Weise nach rechts verschiebt, bis der Divisor eine natürliche Zahl wird.

Nachfolgend einige Beispiele entsprechend dieser Regel:

1. Beispiel: 0,42 : 0,2 =
   4,2 : 2 =
   2,1

   (Der Divisor 0,2 besitzt eine Dezimalstelle. Deshalb wird das Komma in beiden Zahlen um eine Stelle nach rechts verschoben, so dass aus der 2,0 die natürliche Zahl 2 wird. Danach kann wie vorher dividiert werden.

2. Beispiel: 0,4 : 0,08 =
   40 : 8 = 5

3. Beispiel: 14,4 : 0,012 =
   14400 : 12 = 1200

4. Beispiel: 0,1866 : 0,03 =
   18,66 : 3 = 6,22

5. Beispiel: 1016,6 : 0,13 =
   101660 : 13 = 7820